Topologia

Lista 7 (zwartość, homeomomorfizmy, rozmaitości topologiczne)

Zad 1. Pokazać, że przestrzeń dyskretna (X, τ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.

Zad 2. Rozważmy odcinek $X = [0, 1]$ z topologią $\tau = \{\emptyset, X, (0, 1), \{1\}, (0, 1]\}$. Czy jest to przestrzeń zwarta?

Zad 3. Czy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką studnia (patrz zadanie 6 lista 3) jest zwarta?

Zad 4. Twierdzenie Cantora mówi, że jeżeli $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ jest zstępującą rodziną domkniętych podzbiorów zwartej przestrzeni X, to

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Pokazać na przykładzie, że założenia o zwartości przestrzeni X w tezie tego twierdzenia nie można opuścić.

Zad 5. Czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - \frac{1}{e^t}) \cos t, y = (1 - \frac{1}{e^t} \sin t,\ t \in [0, \infty),\ \text{lub } x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 + e^t) \cos t, y = (1 + e^t \sin t,\ t \in [0, \infty),\ \text{lub } x^2 + y^2 = 1\}$$

są homeomorficzne?

Zad 6. Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej kula otwarta nie jest homeomorficzna z kulą domkniętą.

Zad 7. Pokazać, że na zbiorze X nie istnieją dwie różne, porównywalne topologie zadające na X strukturę zwartej przestrzeni Hausdorffa.

Zad 8. Podać jawny wzór na homeomorfizm $h : A \to (0, 1)$, gdzie zbiór A jest wyposażony w topologię indukowaną z płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$, gdy

$$a)\ A = \{0\} \times [0, 1) \cup (0, 1) \times \{0\}, \qquad b)\ A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\},$$

$$c)\ A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1, 0)\}$$

Zad 9. Wykazać, że okrąg, brzeg kwadratu oraz brzeg trójkąta wyposażone w topologię indukowaną z płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ są parami homeomorficzne.

Zad 10. Które ze zbiorów występujących w zadaniach 8, są rozmaitościami topologicznymi?

Zad 11. Rozważmy litery tworzące poniższy napis jako podprzestrzenie topologiczne płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ (załóżmy, że są one „nieskończenie cienkie” i nie mają końców):

ROZMAITOŚĆ TOPOLOGICZNA

vs HOMEOMORFIZM

Pogrupować litery na klasy liter wzajemnie homeomorficznych, oraz wyróżnić litery będące rozmaitościami topologicznymi?